

## تحلیل حساسیت زاویه نشانه‌روی پرتو یک آنتن آرایه فازی صفحه‌ای به خطای فاز عناصر

حمید حاجیان<sup>۱\*</sup>، محمد کریمی<sup>۲</sup>، علی بنایی<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه صنعتی شریف، ۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید بهشتی، ۳- استاد دانشگاه صنعتی شریف

(تاریخ دریافت: ۹۴/۰۲/۰۴، تاریخ پذیرش: ۹۴/۰۶/۰۳)

**چکیده:** تحلیل حساسیت در آنتن آرایه فازی دو بُعدی انجام شده است. روش‌های عددی مناسب برای محاسبه زاویه نشانه‌روی پرتو در آرایه دو بُعدی بررسی شده است. روش عددی مورد استفاده با محاسبه فاکتور آرایه به صورت عددی و محاسبه زاویه نشانه‌روی پرتو مورد تایید قرار گرفته است. انحراف زاویه نشانه‌روی پرتو در اثر اختلال فاز هر یک از عناصر آرایه به دست آمده و نشان داده شده که خطای فاز عناصر پیرامونی نسبت به عناصر میانی تأثیر بیشتری بر خطای زاویه نشانه‌روی پرتو آرایه دو بُعدی دارد. این مساله از این جهت که با دانستن این مطلب می‌توان فازدهی عناصر پیرامونی را نسبت به عناصر میانی با دقت بیشتر و خطای کمتری انجام داد، دارای اهمیت است. به عنوان مثال می‌توان در انتخاب شیفت‌دهنده‌های فاز این نکته را مد نظر قرار داد و اگر دو نوع شیفت‌دهنده فاز با کیفیت مختلف از نظر خطای شیفت فاز داشته باشیم، شیفت‌دهنده‌های فاز با کیفیت بالاتر و خطای کمتر را برای عناصر پیرامونی که دارای حساسیت بیشتری هستند و شیفت‌دهنده‌های فاز با کیفیت کمتر و خطای بیشتر (و قطعاً قیمت کمتر) را برای عناصر درونی آرایه مورد استفاده قرار می‌دهیم.

### واژه‌های کلیدی: آنتن آرایه فازی، تحلیل حساسیت، خطای زاویه نشانه‌روی پرتو، خطای فاز

#### ۱- مقدمه

عوامل ایجاد خطا در فاز عناصر شامل خطای تصادفی شیفت‌دهنده‌های فاز، خطای گسسته‌سازی شیفت‌دهنده‌های فاز [۱] خطا در طول الکتریکی مسیر منبع سیگنال تا عناصر تشعشعی و ... می‌باشد. اگرچه علاوه بر خطای فاز، خطای دامنه سیگنال تشعشعی عناصر نیز می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد اما نشان داده شده است که تأثیر خطای دامنه عناصر نسبت به خطای فاز کمتر بوده و قابل صرف نظر کردن می‌باشد [۲]. یکی از عوامل موثر بر خطای فاز عناصر در آنتن‌های آرایه فازی، خطای گسسته‌سازی شیفت فاز عناصر می‌باشد. این مساله با توجه به این که برای ایجاد شیفت فاز در آنتن‌های آرایه فازی معمولاً از شیفت‌دهنده‌های فاز دیجیتال، که قادر به اعمال تمام مقادیر پیوسته فاز نمی‌باشند، استفاده می‌شود اتفاق می‌افتد.

این مساله از مدت‌ها پیش مورد توجه قرار گرفته است. مثلاً Smith در سال ۱۹۸۳ روش‌های موجود برای گسسته‌سازی فاز عناصر را باهم مقایسه کرده است [۱]. در این مقاله روش‌های متنوعی که برای تصادفی کردن خطای فاز ناشی از گسسته‌سازی ارائه شده با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همچنین در این مقاله اشاره شده که بیشترین تأثیر خطای گسسته‌سازی بر روی سطح لوب

بررسی حساسیت زاویه نشانه‌روی پرتو نسبت به خطای فاز عناصر در آنتن‌های آرایه فازی از اهمیت بالایی برخوردار است. هدف از انجام چنین تحلیل حساسیتی، مقایسه عناصر آرایه از نظر تأثیر بر خطای زاویه نشانه‌روی پرتو می‌باشد. در واقع می‌خواهیم بدانیم اگر خطای تصادفی در فاز عناصر آرایه ایجاد شود، به گونه‌ای که توسط شیفت‌دهنده فاز قابل جبران و تصحیح نباشد، تأثیر کدامیک از عناصر دارای خطای فاز در خطای زاویه نشانه‌روی پرتو بیشتر است. با دانستن این مطلب می‌توان در طراحی و ساخت آنتن‌های آرایه فازی، دقت فازدهی عناصر دارای حساسیت بیشتر را بالا برده و کارایی آرایه را افزایش داد. اساساً مجموعه خطاهای موجود در یک آنتن آرایه فازی می‌تواند بر هر یک از چهار پارامتر اصلی الگوی تشعشعی آرایه تأثیرگذار باشد. این چهار پارامتر عبارتند از: زاویه نشانه‌روی پرتو، عرض پرتو نصف توان، بهره آرایه و سطح لوب جانبی الگوی تشعشعی که در این مقاله تنها تأثیر خطای فاز تصادفی عناصر آرایه بر زاویه نشانه‌روی پرتو مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

نیز مدل تئوری تلف ترکیب توان آنتن فرستنده در حضور خطای فاز ارائه شد [۱۴]. در سال ۲۰۱۲ اثر خطای تصادفی فاز بر خصوصیات تشعشعی فراکتال‌های دُو بُعدی بر پایه آنتن‌های رفلکتوری مورد بررسی قرار گرفت [۱۵]. در سال ۲۰۱۰ نیز تاثیر خطاهای ساخت بر الگوی تشعشعی آرایه آنتن‌های کروی مورد بررسی قرار گرفت [۱۶]. علیرغم انجام تمامی این فعالیت‌ها، تاکنون تحلیل حساسیت پارامترهای آنتن‌های آرایه فازی (مخصوصاً زاویه نشانه‌روی پرتو) به خطای فاز عناصر مورد بررسی قرار نگرفته است. بنابراین، در ادامه ابتدا رابطه تحلیلی زاویه نشانه‌روی پرتو در آرایه دُو بُعدی را استخراج خواهیم کرد. پس از آن با محاسبه عددی فاکتور آرایه در چند حالت، اعتبار رابطه تحلیلی به دست آمده را اثبات می‌کنیم. پس از آن با کمک رابطه تحلیلی به دست آمده، حساسیت زاویه نشانه‌روی پرتو چند آنتن آرایه فازی دُو بُعدی با چینش‌های متفاوت را به خطای فاز عناصر به دست می‌آوریم.

## ۲- اختلال در زاویه نشانه‌روی پرتو نسبت به راستای مطلوب

یک آرایه دُو بُعدی دارای  $N$  عنصر تشعشع‌کننده را در نظر بگیرید که با فاصله نیم طول موج (برای جلوگیری از ایجاد لوب جعلی<sup>۱</sup> در تمامی زوایای نشانه‌روی پرتو) در دو بُعد با چینش دلخواه در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. خطای فاز عناصر نسبت به مقادیر مطلوب را به ترتیب  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$  در نظر می‌گیریم. لازم به ذکر است در این تحلیل تنها فاکتور آرایه در نظر گرفته می‌شود و عناصر تشعشعی (آنتن‌ها) دارای الگوی تشعشعی کاملاً مشابه فرض می‌شوند.

در صورتی که دامنه تحریک تمام عناصر را برابر فرض کنیم (برای سادگی دامنه تحریک تمام عناصر واحد فرض می‌شود)، فاکتور آرایه برابر است با [۱۷]:

$$F(\theta, \phi) = W^T \times [V^*(\theta, \phi)] \\ = \sum_{m=1}^N e^{-j\psi_m} e^{jk(x_m \cos\phi + y_m \sin\phi)\sin\theta} \quad (1)$$

در این رابطه زوایای سمت و ارتفاع مربوط به جهتی است که شدت موج دریافتی توسط آرایه در آن محاسبه می‌شود.  $W$  نیز بردار وزن‌دهی عناصر است که بردار یکه فرض می‌شود. همچنین، مختصات عنصر  $i$ -ام آرایه بوده و نیز داریم:

جانبی الگوی تشعشعی آرایه می‌باشد. پس از آن در سال ۲۰۰۳، Wei Jiang مشابه همین فعالیت را با مقایسه روش‌های جدید تصادفی کردن خطای گسسته‌سازی فاز عناصر انجام داد [۳]. در این مقاله روش بهینه تصادفی کردن از نظر خطای زاویه نشانه‌روی پرتو معرفی شده است. در مقاله پیش رو تنها اثر خطای تصادفی فاز عناصر آنتن آرایه فازی بر زاویه نشانه‌روی پرتو آرایه مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

سابقه بررسی خطای فاز و اثرات آن در الگوی تشعشعی آرایه نیز به سال‌ها قبل باز می‌گردد. مقاله کلاسیک Ruze دهانه پیوسته‌ای را در نظر گرفته است که در آن خطای فاز به صورت یکنواخت توزیع شده است [۴]. پس از آن Bailin خطای تصادفی را در یک آرایه خطی در نظر گرفته است که عامل خطا ناشی از مکان قرارگیری عناصر می‌باشد [۵]. Elliot این تحلیل را به آرایه‌های دُو بُعدی تعمیم داد و در آن خطا را به صورت مستقل و گوسی فرض کرد [۶]. Rondinelli توزیع آماری لوب جانبی و خطای زاویه نشانه‌روی پرتو را برای خطاهای ساده در جریان تحریک عناصر مورد بررسی قرار داد [۷]. Leitcher تحلیل خطای زاویه نشانه‌روی پرتو را به آرایه‌های خطی با خطای گوسی تعمیم داد [۸]. پس از آن Greene تحلیل پرتو اصلی را به آرایه‌های مصنوعی با خطای فاز گوسی خارجی اعمال کرد [۹]. Develet میانگین آماری را برای آرایه مصنوعی متمرکز شده با خطای فاز گوسی دارای هم‌بستگی فضایی استخراج کرد [۱۰]. Cheng نیز اثرات خطای فاز بر بهره و عرض بیم آنتن را مورد بررسی قرار داد [۱۱].

همچنین Carver و دیگران در مقاله‌ای خطای زاویه نشانه‌روی پرتو در آرایه مستطیلی با ابعاد دلخواه را تحلیل کرده و روابط تحلیلی خطا را به دست آوردند که نتیجه آن به کمک شبیه‌سازی مونت-کارلو تایید شد [۱۲]. این فعالیت در سال ۱۹۷۳ انجام شد و یکی از نتایج مهم آن این بود که واریانس خطای زاویه نشانه‌روی پرتو در آرایه خطی و صفحه‌ای به ترتیب با  $\frac{1}{N^2}$  و  $\frac{1}{N}$  کاهش می‌یابد ( $N$  تعداد عناصر آرایه می‌باشد). در نتیجه یکی از راه‌های کاستن از اثرات خطای فاز عناصر در آنتن‌های آرایه فازی، افزایش دادن تعداد عناصر می‌باشد. یکی دیگر از این فعالیت‌ها توسط Shao انجام شد که در آن برای اولین بار دقت زاویه نشانه‌روی پرتو در آنتن‌های آرایه فازی سه بُعدی بررسی شده و فرمول‌هایی برای محاسبه خطا در این آرایه‌ها استخراج شده است [۲].

در سال ۲۰۱۳، Rocca تلرانس الگوی تشعشعی در اثر خطای دامنه تشعشع‌کننده‌ها را مورد تحلیل قرار داد [۱۳]. در سال ۲۰۰۸

محاسبه زاویه نشانه‌روی پرتو، کل الگوی تشعشی آرایه محاسبه شود، زمان محاسبات آنقدر زیاد می‌شود که عملاً انجام تحلیل حساسیت برای آرایه‌های بزرگ امکان‌پذیر نخواهد بود. در نتیجه در ادامه قبل از انجام تحلیل حساسیت، به بررسی چند روش برای محاسبه محل بیشینه الگوی تشعشی (که در واقع همان زاویه نشانه‌روی پرتو می‌باشد) و مقایسه کارایی آن‌ها می‌پردازیم.

## ۲-۱- جستجو با دقت بالا (High Accuracy Search Method)

اولین و ساده‌ترین راه‌حلی که می‌توان مورد استفاده قرار داد جستجوی کل محدوده‌های قابل قبول برای و به‌منظور پیدا کردن مقدار بیشینه  $P(\theta, \phi)$  است. اما با توجه به دقت مورد نیاز و نیز تعداد عناصر آرایه، این کار نیازمند حجم و زمان محاسبات زیادی است. برای حل این مشکل می‌توان ابتدا کل محدوده قابل قبول برای و را با دقت کم جستجو کرده و تقریبی اولیه از محدوده نقطه بیشینه به دست آورد. سپس حول نقطه تقریبی به دست آمده را با دقت مطلوب جستجو می‌کنیم. این روش از جستجوی کل محدوده قابل قبول برای و با دقت بالا سریع‌تر بوده اما همچنان از سرعت کافی برخوردار نیست.

## ۲-۲ روش تکرار (Iterative Method)

هدف، پیدا کردن محل بیشینه تابع  $P(\theta, \phi)$  است؛ یعنی حل مسئله بهینه‌سازی زیر:

$$\begin{aligned} \max \quad & P(\theta, \phi) \\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2 \end{aligned} \quad (7)$$

اما تابع  $P(\theta, \phi)$  محدب نبوده و لذا برای حل آن روش‌های بهینه‌سازی محدب را نمی‌توان به کار برد. شرط لازم (نه کافی) برای نقطه بیشینه این است که گرادیان تابع در آن نقطه برابر صفر باشد. یعنی؛

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta, \phi} P(\theta, \phi) &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial \theta} &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N -k \sin \theta [-(x_n - x_m) \sin \phi + (y_n - y_m) \cos \phi] \\ &\quad \times \sin(\alpha_{mn} + \beta_{mn}) \\ \frac{\partial P}{\partial \phi} &= 0 \rightarrow \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N [(x_n - x_m) \sin \phi - (y_n - y_m) \cos \phi] \\ &\quad \times \sin(\alpha_{mn} + \beta_{mn}) = 0 \end{aligned}$$

$$[V(\theta, \phi)] = \begin{bmatrix} e^{-jk(x_1 \cos \phi + y_1 \sin \phi) \sin \theta} \\ e^{-jk(x_2 \cos \phi + y_2 \sin \phi) \sin \theta} \\ \vdots \\ e^{-jk(x_N \cos \phi + y_N \sin \phi) \sin \theta} \end{bmatrix} \quad (2)$$

الگوی تشعشی<sup>۱</sup> آرایه از رابطه (۳) به دست می‌آید:

$$P(\theta, \phi) = |F(\theta, \phi)|^2 = \left| \sum_{m=1}^N e^{-j\psi_m} e^{jk(x_m \cos \phi + y_m \sin \phi) \sin \theta} \right|^2 \quad (3)$$

بسط تابع  $P(\theta, \phi)$  را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} P(\theta, \phi) &= \left| \sum_{m=1}^N e^{-j\psi_m} e^{jk(x_m \cos \phi + y_m \sin \phi) \sin \theta} \right|^2 \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N e^{-j\psi_m} e^{jk(x_m \cos \phi + y_m \sin \phi) \sin \theta} e^{j\psi_n} \\ &\quad e^{-jk(x_n \cos \phi + y_n \sin \phi) \sin \theta} \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N e^{-j\alpha_{mn}} e^{-j\beta_{mn}} \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \cos(\alpha_{mn} + \beta_{mn}) - j \sin(\alpha_{mn} + \beta_{mn}) \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \alpha_{mn} &= \psi_m - \psi_n \\ \beta_{mn} &= k[(x_n - x_m) \cos \phi + (y_n - y_m) \sin \phi] \sin \theta \end{aligned} \quad (5)$$

اما می‌دانیم  $|F(\theta, \phi)|^2$  تابع همواره حقیقی است. پس بخش موهومی رابطه (۴) برابر صفر بوده و داریم:

$$P(\theta, \phi) = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \cos(\alpha_{mn} + \beta_{mn}) \quad (6)$$

اگرچه هدف مقاله بررسی حساسیت زاویه نشانه‌روی پرتو نسبت به خطای فاز عناصر آرایه می‌باشد، ولی روش و زمان محاسبه زاویه نشانه‌روی پرتو مساله مهمی می‌باشد. چراکه اگر قرار باشد برای

## ۲-۴- استفاده از حالت خاص روش جستجوی مستقیم

ساده Nelder-Mead

راه حل دیگر این است که از حالت تک-متغیره تابع قبل استفاده کنیم. یعنی مقدار  $n$  را ثابت گرفته (برابر مقدار تقریبی به دست آمده از قبل) و تنها متغیر  $w$  را به کمک این روش محاسبه کنیم. سپس  $w$  به دست آمده را در تابع فاکتور آرایه قرار داده و این بار زاویه  $n$  را حول مقدار تقریبی آن با دقت مورد نیاز جستجو می‌کنیم.

## ۲-۵- روش نیوتن-رافسون (Newton-Raphson Method)

این روش همانند روش تکرار می‌باشد با این تفاوت که در مرحله دوم به جای استفاده از رابطه (۱۰)، از روش نیوتن-رافسون استفاده می‌کنیم. در روش نیوتن-رافسون داریم:

$$x_{k+1} = x_k + \zeta_k p_k \quad (11)$$

که در آن،  $x_k$  مقدار متغیر در لحظه  $k$ ،  $k$  طول گام و  $p_k$  بردار جهتی در لحظه  $k$  بوده که نشان می‌دهد در این مرحله مقدار متغیر در چه جهتی و به چه اندازه کاهش یا افزایش یابد. در الگوریتم نیوتن-رافسون،  $p_k = -[B]^{-1} \nabla f(x_k)$  می‌باشد که در آن،  $[B] = -\nabla^2 f(x_k)$  از رابطه زیر به دست می‌آید.

برای یافتن نقطه بیشینه، در این روش نیز مانند روش تکرار، گرادیان تابع فاکتور آرایه (رابطه (۶)) را برابر صفر قرار می‌دهیم. یعنی:

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta, \phi} P(\theta, \phi) &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial \phi} &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N -jk [-(x_n - x_m) \sin \phi + (y_n - y_m) \cos \phi] \\ &\times \sin(\alpha_{mn} + \beta_{mn}) = 0 \\ \Rightarrow \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N [-(x_n - x_m) \sin \phi + (y_n - y_m) \cos \phi] \\ &\times \sin(\alpha_{mn} + \beta_{mn}) &= 0 \quad (12) \\ \Rightarrow \sin \phi \left( \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (x_n - x_m) \sin(\alpha_{mn} + \beta_{mn}) \right) \\ &= \cos \phi \left( \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (y_n - y_m) \sin(\alpha_{mn} + \beta_{mn}) \right) \\ \Rightarrow \sin \phi \times S_x - \cos \phi \times S_y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \left( \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (x_n - x_m) \sin(\alpha_{mn} + \beta_{mn}) \right) \sin \phi \\ &= \left( \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (y_n - y_m) \sin(\alpha_{mn} + \beta_{mn}) \right) \cos \phi \quad (8) \end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned} \tan \phi &= \frac{\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (y_n - y_m) \sin(\alpha_{mn} + \beta_{mn})}{\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (x_n - x_m) \sin(\alpha_{mn} + \beta_{mn})} \\ \rightarrow \phi &= \tan^{-1} \left( \frac{\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (y_n - y_m) \sin(\alpha_{mn} + \beta_{mn})}{\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (x_n - x_m) \sin(\alpha_{mn} + \beta_{mn})} \right) \quad (9) \end{aligned}$$

که در آن  $\alpha_{mn}$  و  $\beta_{mn}$  قبلاً تعریف شده‌اند.

اما همان‌طور که اشاره شد، الگوی تشعشی آرایه یک تابع محدب نبوده و نقاط اکسترمم زیادی دارد که در روابط فوق صدق می‌کنند. بنابراین، در اینجا یک روش سه مرحله‌ای برای یافتن نقطه بیشینه مطلق ارائه می‌شود. در مرحله اول، محدوده قابل قبول برای متغیرهای  $w$  و  $n$  را با دقت کم جستجو کرده و تقریبی از نقطه بیشینه پیدا می‌کنیم. در مرحله دوم، با جاگذاری مقادیر تقریبی به دست آمده از مرحله قبل و نیز ثابت فرض کردن  $n$ ، مقدار تقریبی بهتری برای  $w$  به دست می‌آوریم. این کار را می‌توان تا جایی که به دقت مورد نیاز رسید، تکرار کرد.

$$\begin{aligned} \phi_{k+1} &= \tan^{-1} \left( \frac{\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (y_n - y_m) \sin(\alpha_{mn} + \beta_{mn})}{\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (x_n - x_m) \sin(\alpha_{mn} + \beta_{mn})} \right) \\ \beta_{mn} &= k [(x_n - x_m) \cos \phi_k + (y_n - y_m) \sin \phi_k] \sin \theta \quad (10) \end{aligned}$$

در مرحله سوم، جواب به دست آمده برای زاویه  $w$  را در معادله الگوی تشعشی آرایه جاگذاری کرده و با جستجو حول مقدار تقریبی به دست آمده از مرحله اول برای  $w$ ، مقدار دقیق تری برای  $w$  به دست می‌آوریم.

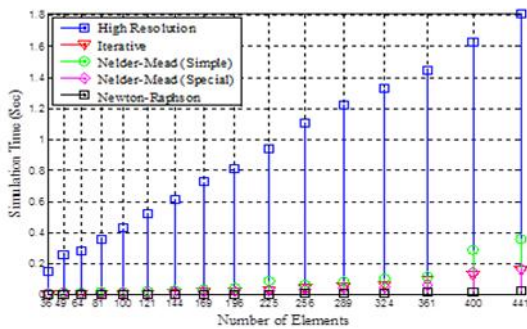
## ۲-۳- روش جستجوی مستقیم ساده Nelder-Mead

در این روش از قابلیت‌های بهینه‌سازی نرم افزار MATLAB fminsearch استفاده شده است. تابع مورد استفاده در این روش تابع fminsearch است. در این روش فاکتور آرایه و مقادیر اولیه زوایای  $w$  و  $n$  به عنوان ورودی به تابع داده و در خروجی، مقدار دقیق (با دقت بالا) زوایای  $w$  و  $n$  و نیز مقدار تابع فاکتور آرایه در این نقطه را خواهیم داشت. در این روش از الگوریتم جستجوی ساده Nelder-Mead استفاده می‌شود [۱۸].

با حل معادله (۱۷)، می‌توان زاویه نشانه‌روی پرتو و به دنبال آن میزان تاثیر خطاهای اعمال شده به عناصر آرایه در زاویه نشانه‌روی پرتو را به دست آورد.

به منظور مقایسه روش‌های ارائه شده، یک آرایه مربعی با ۴۹ عنصر و فاصله  $\frac{\lambda}{2}$  بین عناصر در دو بُعد مورد تحلیل قرار گرفته است. در این حالت فاز عناصر طوری انتخاب شده است که زاویه نشانه‌روی پرتو تقریباً برابر ۵۰ درجه در سمت و ۱٫۵ درجه در ارتفاع باشد. نتایج تحلیل آرایه با ۵ روش ارائه شده در جدول ۱ آورده شده است. در مرحله اول، قابلیت تفکیک زاویه برابر ۲ درجه و قابلیت تفکیک زاویه برابر ۰٫۳ درجه در نظر گرفته شده است. همان‌طور که دیده می‌شود تمامی روش‌ها موفق به یافتن زاویه نشانه‌روی پرتو با دقت قابل قبول شده‌اند و فقط زمان مورد نیاز آن‌ها متفاوت می‌باشد.

برای مقایسه بهتر زمان مورد نیاز هر یک از این روش‌ها، زاویه نشانه‌روی پرتو برای یک آرایه مربعی با تعداد عنصر متغیر با استفاده از این روش‌ها به دست آمده و نتایج آن در شکل (۱) آورده شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، زمان لازم برای روش اول یعنی جستجوی با قابلیت تفکیک بالا به مراتب بیشتر از دیگر روش‌ها است که به منظور مقایسه بهتر، زمان مربوط به روش‌های دو تا پنج در شکل (۲) ارائه شده است. همان‌طور که دیده می‌شود روش نیوتن-رافسون در زمان کمتری موفق به یافتن زاویه نشانه‌روی پرتو شده است.



شکل ۱: زمان اجرای روش‌های فوق بر حسب تعداد عنصر

جدول ۱: مقایسه روش‌های ارائه شده برای محاسبه زاویه نشانه‌روی پرتو

نیوتن-رافسون	حالت خاص جستجوی Nelder-Mead	جستجوی Nelder-Mead	تکرار	جستجو با دقت بالا	
۵۰	۵۰	۵۰	۵۰٫۲۳	۵۰	زاویه w به دست آمده (درجه)
۱٫۵	۱٫۵	۱٫۵	۱٫۵	۱٫۵	زاویه phi به دست آمده (درجه)
۰٫۰۰۶۲	۰٫۰۷۶	۰٫۰۵۹۶	۰٫۰۳۴۴	۰٫۲۳۴	زمان مورد نیاز (ثانیه)

$$S_x = \left( \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (x_n - x_m) \sin(\alpha_{mn} + \beta_{mn}) \right) \quad (13)$$

$$S_y = \left( \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (y_n - y_m) \sin(\alpha_{mn} + \beta_{mn}) \right) \quad (14)$$

همچنین:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \theta} &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N -jk [(x_n - x_m) \cos \phi + (y_n - y_m) \sin \phi] \\ &\times \cos \theta \sin(\alpha_{mn} + \beta_{mn}) \\ \Rightarrow \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N [(x_n - x_m) \cos \phi + (y_n - y_m) \sin \phi] \\ &\times \sin(\alpha_{mn} + \beta_{mn}) = 0 \\ \Rightarrow \sin \phi \left( \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (y_n - y_m) \sin(\alpha_{mn} + \beta_{mn}) \right) \\ &= -\cos \phi \left( \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (x_n - x_m) \sin(\alpha_{mn} + \beta_{mn}) \right) \\ \sin \phi \times S_y + \cos \phi \times S_x &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

روابط (۱۲) و (۱۵) تشکیل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول همگن می‌دهند. چون  $\sin$  و  $\cos$  هم‌زمان نمی‌توانند صفر باشند، برای این‌که معادله جواب داشته باشد، لازم است دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد، یعنی:

$$\begin{aligned} \det \left( \begin{bmatrix} S_x & S_y \\ -S_y & S_x \end{bmatrix} \right) = 0 &\rightarrow (S_x)^2 \\ + (S_y)^2 = 0 &\rightarrow \begin{cases} S_x = 0 \\ S_y = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

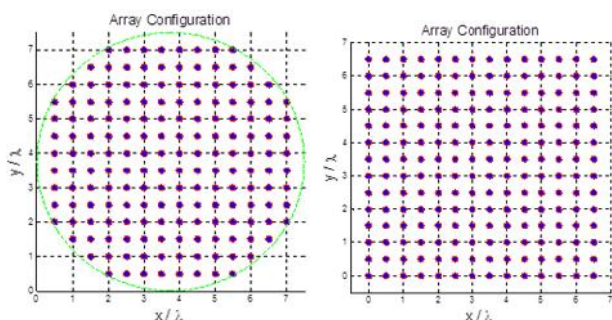
$$\begin{cases} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (x_n - x_m) \sin(\alpha_{mn} + \beta_{mn}) = 0 \\ \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (y_n - y_m) \sin(\alpha_{mn} + \beta_{mn}) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

آرایه و به دست آوردن زاویه نشانه روی پرتو با جستجوی کل محدوده های قابل قبول برای زوایای سمت و ارتفاع را نشان می دهد. همان گونه که مشاهده می شود، با دو تکرار در روش نیوتن-رافسون می توان به دقت مورد نیاز رسید.

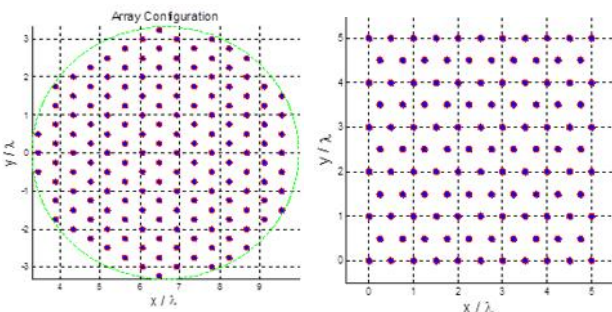
#### ۴- محاسبه حساسیت زاویه نشانه روی پرتو آنتن آرایه فازی به خطای فاز عناصر

در این بخش قصد داریم حساسیت زاویه نشانه روی پرتو در آنتن های آرایه فازی دو بعدی را به خطای فاز تک تک عناصر آرایه به دست آورده و ببینیم خطای فاز کدامیک از عناصر تاثیر بیشتری بر خطای زاویه نشانه روی پرتو دارند. به این منظور چهار آرایه دوبعدی مربعی با مرز مربعی، مربعی با مرز دایروی، مثلثی با مرز مربعی و مثلثی با مرز دایروی در نظر گرفته شده است.

این آرایه ها به ترتیب دارای ۱۹۶، ۱۷۲، ۱۱۶ و ۱۵۶ عنصر می باشند. علت تسمیه آرایه مثلثی نحوه چیدمان عناصر در این نوع آرایه ها می باشد. همان طور که در شکل (۴) دیده می شود، چیدمان عناصر همسایه در این آرایه ها به صورت مثلثی می باشد. این نام گذاری مختص این مقاله نبوده و در مراجع دیگر نیز این نوع آرایه به آرایه مثلثی شهرت دارد [۱۹].

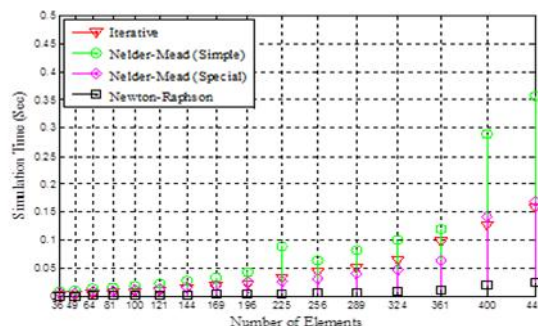


آرایه مربعی دارای ۱۹۶ عنصر      آرایه مربعی با مرز دایره دارای ۱۷۲ عنصر



آرایه مثلثی دارای ۱۱۶ عنصر      آرایه مثلثی با مرز دایره دارای ۱۵۶ عنصر

شکل ۴: چیدمان آرایه های دوبعدی



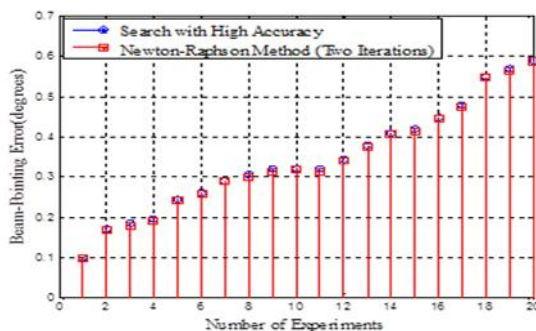
شکل ۵: زمان اجرای روش های ۲ تا ۵ بر حسب تعداد عنصر

#### ۳- اثبات اعتبار روش مورد استفاده

در ادامه با ارائه یک مثال اعتبار روش نیوتن-رافسون، که قرار است در محاسبات این مقاله مورد استفاده قرار گیرد، را بررسی خواهیم کرد؛ به این صورت که زاویه نشانه روی پرتو آرایه ها را با روش نیوتن-رافسون از یک طرف و مقدار الگوی تشعشی جهت به دست آوردن پیک آن به عنوان زاویه نشانه روی پرتو از طرف دیگر، محاسبه می شود. نتیجه به دست آمده توسط این دو روش باید با هم سازگار باشد.

آرایه ای مربعی با ۲۵ عنصر در نظر بگیرید؛ بدون کاستن از کلیت مساله و برای سادگی فرض می کنیم فاز تمامی عناصر صفر باشد. سپس به تمامی عناصر خطای فاز اضافه می کنیم. خطا را به صورت یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار ۵ درجه در نظر می گیریم. (همان طور که قبلاً اشاره شد این مثال تنها برای اثبات اعتبار رابطه تحلیلی به دست آمده بوده و تحلیل حساسیت در بخش بعد انجام خواهد شد).

شکل (۳)، نتایج استفاده از رابطه تحلیلی به دست آمده (با دو تکرار در روش نیوتن-رافسون) و محاسبه عددی فاکتور آرایه (تشکیل فاکتور



شکل ۳: نتیجه محاسبه زاویه نشانه روی پرتو با روش تحلیلی به دست آمده و روش محاسبه عددی فاکتور آرایه برای آرایه دارای ۲۵ عنصر

عددی فاکتور آرایه و یافتن بیشینه آن اثبات شد. پس از آن حساسیت زاویه نشانه‌روی پرتو نسبت به اختلال فاز عناصر در چهار آرایه دوبعدی محاسبه شده و دیده شد که در تمامی آرایه‌های مورد بحث، خطای فاز عناصر پیرامونی آرایه نسبت به عناصر میانی تاثیر بیشتری بر زاویه نشانه‌روی پرتو دارد.

این مساله از این جهت که با دانستن این مطلب می‌توان فازدهی عناصر پیرامونی را نسبت به عناصر میانی با دقت بیشتر و خطای کمتری انجام داد، دارای اهمیت است. به‌عنوان مثال می‌توان در انتخاب شیفت‌دهنده‌های فاز این نکته را مد نظر قرار داد و اگر دو نوع شیفت‌دهنده فاز با کیفیت مختلف از نظر خطای شیفت فاز داشته باشیم، شیفت‌دهنده‌های فاز با کیفیت بالاتر و خطای کمتر را برای عناصر پیرامونی که دارای حساسیت بیشتری هستند استفاده کرده و برای عناصر درونی آرایه شیفت‌دهنده‌های فاز با کیفیت کمتر و خطای بیشتر (و قطعاً قیمت کمتر) را مورد استفاده قرار دهیم.

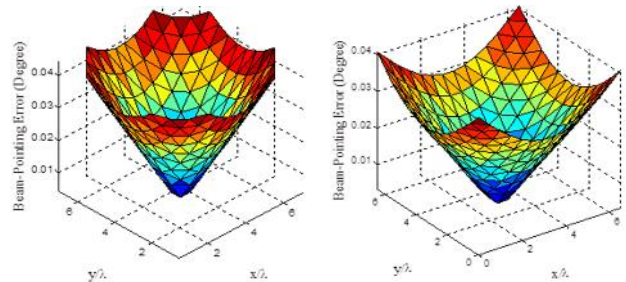
این مساله در سامانه‌های تجاری که معمولاً قیمت در آن‌ها پارامتر مهمی می‌باشد اهمیت بالایی داشته و می‌تواند هزینه کل آنتن آرایه فازی را تا حدودی کاهش دهد. همچنین اگر قرار باشد مدارات جبران‌سازی برای جبران خطای شیفت فاز عناصر تعبیه گردد، می‌توان با توجه به حساسیت بالاتر عناصر پیرامونی، این مدارات را فقط برای این عناصر استفاده کرده و عناصر میانی آرایه را بدون جبران‌کننده فاز مورد استفاده قرار داد و با این روش مدارات جبران‌سازی را ساده‌تر و ارزان‌تر کرد. همچنین این مساله می‌تواند در کالیبراسیون این آرایه‌ها نیز مورد استفاده قرار گرفته و فرایند کالیبراسیون را بیشتر معطوف به عناصر پیرامونی آرایه کند.

## ۶- مراجع

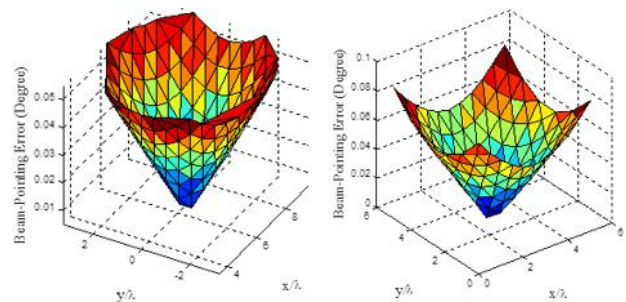
- [1] M. S. Smith and Y. C. Guo, "A comparison of methods for randomizing phasing quantization errors in phased arrays," IEEE Trans. Antennas Propag., vol. AP-31, pp. 821-827, Nov. 1983.
- [2] J. Shao, and Y. Guo, "Beam Pointing Accuracy of Three Dimensional Array Antennas," Proceedings of ISAP 92, Sapporo, Japan, pp. 473-476. 2002.
- [3] W. Jiang et al., "Comparison of Random Phasing Methods for Reducing Beam Pointing Errors in Phased Array," IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 51, no. 4, pp. 782-787, Apr. 2003.
- [4] J. Ruze, "The effect of aperture errors on the antenna radiation pattern," Nuovo Climento (Supplement), vol. 9, pp. 364-380, 1952.
- [5] L. L. Bailin and M. J. Ehrlich, "Factors affecting the performance of linear arrays," Proc. IRE, vol. 41, pp.

فاصله عناصر از یکدیگر نیم طول موج در دو بعد می‌باشد. در تمامی این آرایه‌ها خطای فاز مشخص ۵۰ درجه به تک‌تک عناصر اضافه کرده و اثر این اختلال فاز را با محاسبه زاویه نشانه‌روی پرتو به دست آورده‌ایم. خطای زاویه نشانه‌روی پرتو در هر یک از این شبیه‌سازی‌ها در شکل (۵) نشان داده شده است. محور عمودی نشان‌دهنده میزان خطای زاویه نشانه‌روی پرتو است که در اثر خطای فاز ۵۰ درجه در فاز هر یک از عناصر به‌وجود آمده است. صفحه پایینی شکل‌ها نیز مربوط به مختصات قرارگیری هر یک از عناصر می‌باشد.

در نتیجه در تمامی این آرایه‌ها حساسیت زاویه نشانه‌روی پرتو نسبت به عناصر پیرامونی در مقایسه با عناصر درونی بیشتر بوده و این عناصر نقش بیشتری در ایجاد خطا در زاویه نشانه‌روی پرتو دارا می‌باشند (لازم به ذکر است در مثال‌های متعدد دیگر نیز همین نتیجه به‌دست آمده است که برای پرهیز از حجیم شدن مقاله در اینجا به آن‌ها اشاره نشده است).



آرایه مربعی دارای ۱۹۶ عنصر آرایه مربعی با مرز دایره دارای ۱۷۲ عنصر



آرایه مثلثی دارای ۱۱۶ عنصر آرایه مثلثی با مرز دایره دارای ۱۵۶ عنصر

شکل ۵: خطای زاویه نشانه‌روی پرتو آرایه‌های دوبعدی با تغییر فاز تک‌تک عناصر تشعشع‌کننده

## ۵- نتیجه‌گیری

روش‌های عددی مناسب برای محاسبه زاویه نشانه‌روی پرتو با استفاده از فاز عناصر تشعشع‌کننده در آنتن آرایه فازی دلخواه دوبعدی بررسی شده و اعتبار روش بهینه مورد استفاده با محاسبه

- [13] P. Rocca et al., "Analysis of the Pattern Tolerances in Linear Arrays with Arbitrary Amplitude Errors," *IEEE Antennas and Wireless Propag. Lett.*, vol. 12, 2013.
- [14] L. R. D'Addario, "Combining Loss of a Transmitting Array due to Phase Errors," *IPN Progress Report*, pp. 42-175, Nov. 2008.
- [15] N. Li, B. Duan, and F. Zheng, "Effect of the Random Error on the Radiation Characteristic of the Reflector Antenna Based on Two-Dimensional Fractal," *Hindawi Publishing Corporation, International Journal of Antennas and Propagation*, 2012.
- [16] S. Rubcic, V. Mandric, and S. Rimac-DRLJE, "Fabrication Errors Influence on the Spherical Array Radiation Pattern," *Radioengineering*, vol. 19, no. 3, Sep. 2010.
- [17] C. A. Balanis, "Antenna Theory," Wiley, 2nd ed., 1997.
- [18] J. C. Lagarias, J. A. Reeds, M. H. Wright, and P. E. Wright, "Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions," *SIAM Journal of Optimization*, vol. 9, no. 1, pp. 112-147, 1998.
- [19] R. C. Hansen, "Phased Array Antennas," New York, Wiley, 1998.
- [20] W. H. Press et al., "Numerical Recipes," New York, Cambridge University Press, 1989.
- [21] R. W. Hamming, "Numerical Methods for Scientists and Engineers," International students Edition, 1962.
- 235-241, Feb. 1953.
- [6] R. S. Elliot, "Mechanical and electrical tolerances for two-dimensional scanning antenna arrays," *IRE Trans. Antennas and Propag.*, vol. AP-6, pp. 114-120, Jan. 1958.
- [7] L. A. Rondinelli, "Effects of random errors on the performance of antenna arrays of many elements," *IRE Nat. Conv. Rec.*, pt. I, pp. 174-189, 1959.
- [8] M. Leichter, "Beam pointing errors of long line sources," *IRE Trans. Antennas and Propag.*, vol. AP-8, pp. 268-275, May 1960.
- [9] C. A. Greene and R. T. Moller, "The effect of normally distributed random phase errors on synthetic array gain patterns," *IRE Trans. Military Electronics*, vol. MIL-6, pp. 130-139, Apr. 1962.
- [10] J. A. Develet, "The influence of random phase errors on the angular resolution of synthetic aperture radar systems," *IEEE Trans. Aerospace and Navigational Electronics*, vol. ANE-11, pp. 58-65, Mar. 1964.
- [11] D. Cheng, "Effect of arbitrary phase errors on the gain and beamwidth characteristics of radiation pattern," *IRE Trans. Antennas Propag.*, vol. 3, pp. 145 - 147, 1955.
- [12] K. R. Carver, W. K. Cooper, and W. L. Stutzman, "Beam-pointing errors of planar-phased arrays," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-22, pp. 199-202, Mar. 1973.



---

**Sensitivity analysis of beam pointing angle of planar phased array antennas due to phase error of elements**

**H. Hajian<sup>\*</sup>, M. Karimi, A. Banaei**

<sup>\*</sup> Sharif University of Technology

(Receive: 2014/12/14, Accept: 2015/05/05)

**Abstract**

*Sensitivity analysis has been done in two-dimensional phased array antennas. Numerical methods of computing the beam pointing angle in these arrays has been investigated. The used numerical method has been validated by numerical computing the array factor and beam pointing angle of the array. Deviation of beam pointing angle due to phase deviation of each element of the array is computed and it is shown that the phase error of peripheral elements have more influence in beam pointing angle in two-dimensional arrays than the phase error of inner elements. This result is important because by knowing it we should phase the peripheral elements more accurately in comparison of phasing the inner elements. For example in choosing the phase shifters, we can use the more accurate and expensive ones for the peripheral elements and the phase shifters with lower accuracy and less expensive can be used for the inner elements which has less impact on beam pointing error.*

**Keywords:** Beam-Pointing Error, Phase Error, Phased array antenna, Sensitivity Analysis